

ФН4, 2 курс, 3 семестр, 2015/16 уч.год
Дифференциальная геометрия и основы
тензорного исчисления

Домашнее задание № 2

”Риманова геометрия и тензорный анализ”

Задача 1. Криволинейные системы координат (8 баллов)

1. Доказать, что система функций $\{y^1(x^1, x^2), y^2(x^1, x^2)\}$ задает криволинейную систему координат (y^1, y^2) в некоторой окрестности $U \subseteq \mathbb{R}^2(x^1, x^2)$ точки $P \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2)$. (1)
2. Составить уравнения координатных линий криволинейной системы координат (y^1, y^2) , проходящих через точку P . (1)
3. Найти локальный базис криволинейной системы координат (y^1, y^2) в точке P (1). Сделать чертеж (координатные линии и локальный базис в точке P). (1)
4. Даны касательные векторы $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in T_P U$. Найти координаты вектора $\vec{\xi}$ в криволинейной системе координат (y^1, y^2) , если $\vec{\xi} \leftrightarrow (1, 2)^T$ в системе координат (x^1, x^2) и вектора $\vec{\eta}$ в системе координат (x^1, x^2) , если $\vec{\eta} \leftrightarrow (2, 1)^T$ в системе координат (y^1, y^2) . (1)
5. Вычислить функции g_{ij} криволинейной системы координат (y^1, y^2) . Является ли криволинейная система координат (y^1, y^2) ортогональной? (1)
6. Вычислить длины касательных векторов $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ в криволинейной системе координат (y^1, y^2) . (1)
7. Вычислить угол между векторами $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ в криволинейной системе координат (y^1, y^2) . (1)

Задача 2. Римановы и псевдоримановы метрики (5 баллов)

1. Показать, что метрика dl^2 (см. примечание 2), записанная в криволинейной системе координат (y^1, y^2) из задачи 1, является римановой. Записать риманову метрику dl^2 в системе координат (x^1, x^2) . (1)

2. Вычислить длины касательных векторов $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ из задачи 1 в римановом пространстве (U, dl^2) . (1)
3. Вычислить угол между векторами $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ в римановом пространстве (U, dl^2) . (1)
4. Показать, что метрика dl_1^2 (см. примечание 2), записанная в криволинейной системе координат (y^1, y^2) из задачи 1, является псевдоримановой. Привести примеры ненулевых касательных векторов $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3 \in T_P U$, длины которых в псевдоримановом пространстве (U, dl_1^2) выражаются соответственно действительным, чисто мнимым числом или равны нулю. (2)

Задача 3. Тензоры (7 баллов)

1. Вычислить тензорные произведения $T \otimes S$ и $S \otimes T$ тензоров T и S в линейном пространстве \mathbb{R}^2 (1).
2. Вычислить свертки тензора $T \otimes S$ (2).
3. Вычислить компоненты обратного метрического тензора (g^{ij}) (1).
4. Поднять и опустить один индекс у тензоров T или S (2).
5. Выписать законы преобразования компонент всех тензоров, использовавшихся при решении задачи 3 (1).

Примечания.

1. Каждое задание оценивается целым числом баллов. В скобках указаны максимальные баллы за каждое задание. Максимально возможное число баллов за домашнее задание №2 — 20 баллов. Минимальное зачетное число баллов за домашнее задание №2 — 12 баллов.

2. Условия задач 1 и 3 по вариантам приводятся ниже. Для задачи 2 выбрать самостоятельно 2 матрицы: положительно определенную для метрики dl^2 и знакопеременную для dl_1^2 . Матрицы должны иметь вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где студенты группы ФН4-31 выбирают значения $g_{11} = N \neq g_{22}$, студенты группы ФН4-32 — $g_{22} = N \neq g_{11}$, N — номер варианта.

3. Нумерация заданий: **G – Z– N**

- **G** — номер группы (1 – ФН4-31, 2 – ФН4-32),
- **Z** — номер задачи (1,3),
- **N** — номер варианта.

4. Срок сдачи домашнего задания №2 — 15 неделя.

Задача 1. Криволинейные системы координат.

1-1-1. $y^1 = x^1 + x^2, y^2 = (x^1)^2 - x^2, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-2. $y^1 = (x^1)^2 + (x^2)^2, y^2 = x^1x^2, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-3. $y^1 = x^1 + x^2, y^2 = (x^1)^3 + x^2, P(0, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-4. $y^1 = x^1x^2, y^2 = (x^1)^3 + x^2, P(1, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-5. $y^1 = x^1 + x^2, y^2 = (x^1)^2 + x^2, P(0, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-6. $y^1 = x^1 + (x^2)^2, y^2 = (x^1)^2 + x^2, P(2, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-7. $y^1 = (x^1)^3 + 2x^2, y^2 = x^1x^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-8. $y^1 = x^1x^2, y^2 = x^2 - x^1, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-9. $y^1 = (x^1)^3 + x^2, y^2 = x^1x^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-10. $y^1 = x^1 + x^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-11. $y^1 = (x^1)^2 - 2x^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(0, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-12. $y^1 = (x^1)^2 - (x^2)^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(0, -1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-13. $y^1 = (x^1 - x^2)^2, y^2 = x^1 + 2x^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-14. $y^1 = x^1x^2 - x^2, y^2 = x^1, P(2, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-15. $y^1 = x^1 + (x^2)^2, y^2 = x^2 - (x^1)^2, P(0, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-16. $y^1 = 2x^2 - x^1, y^2 = x^1x^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-17. $y^1 = 2x^1 + x^2, y^2 = (x^1 - x^2)^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-18. $y^1 = x^1x^2 - x^1, y^2 = x^1, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-19. $y^1 = (x^1)^2 + x^2, y^2 = x^1 + x^2, P(2, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-20. $y^1 = x^2 + x^1, y^2 = 2x^1x^2, P(-1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

1-1-21. $y^1 = x^1 + (x^2)^2, y^2 = 2x^1 - x^2, P(2, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

- 2-1-1.** $y^1 = x^2 - (x^1)^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(0, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-2.** $y^1 = x^1 + 2x^2, y^2 = (x^1 - x^2)^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-3.** $y^1 = 2x^1x^2, y^2 = x^2 + x^1, P(-1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-4.** $y^1 = 2x^1 - x^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(2, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-5.** $y^1 = x^1 + (x^2)^2, y^2 = (x^1)^2 - 2x^2, P(0, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-6.** $y^1 = (x^1)^2 - (2x^2)^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-7.** $y^1 = x^1, y^2 = x^1x^2 - x^1, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-8.** $y^1 = (x^1)^2 + x^2, y^2 = x^1 + x^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-9.** $y^1 = x^1 - 2x^2, y^2 = (x^1)^2 + x^2, P(0, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-10.** $y^1 = (x^1 + x^2)^2, y^2 = x^1 - x^2, P(1, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-11.** $y^1 = x^1x^2 - x^2, y^2 = x^2, P(2, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-12.** $y^1 = x^2 - x^1, y^2 = x^1x^2, P(1, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-13.** $y^1 = (x^1)^2 - (x^2)^2, y^2 = x^1 - (x^2)^2, P(0, -1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-14.** $y^1 = (x^1)^2 + (x^2)^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-15.** $y^1 = x^1 + (x^2)^2, y^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-16.** $y^1 = (x^1)^2 + x^2, y^2 = x^1 + (x^2)^2, P(2, 0) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-17.** $y^1 = (x^1)^2 + x^2, y^2 = x^1 + x^2, P(0, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-18.** $y^1 = x^1x^2, y^2 = (x^1)^3 - x^2, P(1, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-19.** $y^1 = (x^1)^3 + x^2, y^2 = x^1 + x^2, P(0, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-20.** $y^1 = x^1x^2, y^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2, P(1, 2) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$
- 2-1-21.** $y^1 = (x^1)^2 - x^2, y^2 = x^1 + x^2, P(2, 1) \in \mathbb{R}^2(x^1, x^2).$

Задача 3. Тензоры

$$T = (T^{ij}), S = (S_l^k)$$

	T^{11}	T^{12}	T^{21}	T^{22}	S_1^1	S_2^1	S_1^2	S_2^2	g_{11}	$g_{12} = g_{21}$	g_{22}
1-3-1.	2	5	0	0	3	4	0	0	1	1	2
1-3-2.	2	5	0	0	3	0	4	0	1	1	3
1-3-3.	2	5	0	0	3	0	0	4	2	1	1
1-3-4.	2	5	0	0	0	4	3	0	1	1	3
1-3-5.	2	5	0	0	0	0	4	3	1	2	3
1-3-6.	2	5	0	0	3	4	0	0	1	2	5
1-3-7.	0	5	2	0	3	4	0	0	1	1	2
1-3-8.	0	5	2	0	3	0	4	0	1	1	3
1-3-9.	0	5	2	0	3	0	0	4	2	1	1
1-3-10.	0	5	2	0	0	4	3	0	1	1	3
1-3-11.	0	5	2	0	0	0	4	3	1	2	3
1-3-12.	0	5	2	0	3	4	0	0	1	2	5
1-3-13.	0	0	2	5	3	4	0	0	1	1	2
1-3-14.	0	0	2	5	3	4	0	0	1	1	2
1-3-15.	0	0	2	5	3	4	0	0	1	1	2
1-3-16.	0	0	2	5	3	4	0	0	1	1	2
1-3-17.	0	0	2	5	3	4	0	0	1	1	2
1-3-18.	0	0	2	5	3	4	0	0	1	1	2

$$T = (T_{ij}), S = (S_l^k)$$

	T_{11}	T_{12}	T_{21}	T_{22}	S_1^1	S_2^1	S_1^2	S_2^2	g_{11}	$g_{12} = g_{21}$	g_{22}
2-3-1.	2	0	5	0	3	4	0	0	1	1	2
2-3-2.	2	0	5	0	3	0	4	0	1	1	3
2-3-3.	2	0	5	0	3	0	0	4	2	1	1
2-3-4.	2	0	5	0	0	4	3	0	1	1	3
2-3-5.	2	0	5	0	0	0	4	3	1	2	3
2-3-6.	2	0	5	0	3	4	0	0	1	2	5
2-3-7.	0	5	0	2	3	4	0	0	1	1	2
2-3-8.	0	5	0	2	3	0	4	0	1	1	3
2-3-9.	0	5	0	2	3	0	0	4	2	1	1
2-3-10.	0	5	0	2	0	4	3	0	1	1	3
2-3-11.	0	5	0	2	0	0	4	3	1	2	3
2-3-12.	0	5	0	2	3	4	0	0	1	2	5
2-3-13.	5	0	0	2	3	4	0	0	1	1	2
2-3-14.	5	0	0	2	3	4	0	0	1	1	2
2-3-15.	5	0	0	2	3	4	0	0	1	1	2
2-3-16.	5	0	0	2	3	4	0	0	1	1	2
2-3-17.	5	0	0	2	3	4	0	0	1	1	2
2-3-18.	5	0	0	2	3	4	0	0	1	1	2